方程式を解くことの意味を解釈する活動に関する研究
－文章題の様々な解法を比較する活動を通して－

羽柴　和也
教科領域コース

１．本研究の目的と方法

本研究の目的は，新しい知識の獲得で活用した既習知識を見直す活動の効果を特定することである。そのために，中学校第１学年「１次方程式の利用」で，既習知識を活用して新しい知識を獲得した後，新しい知識から俯瞰して既習知識を見直すことを意図した授業を設計し，実践する。そして，その学習過程に見られる生徒の特徴的な活動や記述物を質的に分析し，その効果を特定する。

２．本研究に関連する先行研究

⑴ 概念形成

オースベル（1984）は,「新しい意味は，生徒に提示された新しい観念と，生徒の既存の知識構造内の関連観念との相互作用の所産として考えられている。」（p.2）とし,「既習の観念を新しい観念の処理（内化）に活かすことを可能にする唯一の方法は，後者を前者に非恣意的に関連付けることなのである。」（p.89）と述べている。Dubinsky（1991）は，ピアジェの理論を起源とし，数学における様々な概念の構築について，５つの構成作用「内面化，調整，カプセル化，一般化，反転」によって，対象と過程における動的な循環の中で反省的抽象が生じ，シェマと呼ばれる構造の中に組織化されることを示している。

⑵ 既習知識を見直す数学的活動

中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説数学編では，中学校数学科第１学年における数学的活動を通して,「既習の数学はこれらを見いだす際にその支えとして重要な働きをすることになるので，既習の数学のよさを再認識する機会にもなる」（文部科学省，2017，p.96）と示されている。

両角・荻原（2013）は,「学んだ事柄に関する新たな意味形成と，これからの学びに向けての数学的な洞察を繰り返し促す活動を，スパイラルを重視した数学的活動ととらえた」（p.369）と述べ,「スパイラルを重視した数学的活動は学校種を超えて学び直すことの可能性を生む」（荻原・両角，2016，p.22）ことを明らかにしている。また，手島（1992）は，正三角形の概念規定を例に，学習を進める中で既習知識のよさに思いを寄せる場面が存在することを指摘している。

⑶ 方程式の文章題（方程式の利用）

鈴木（2005）は，文章題から方程式を立式する支援として,「try and error」と「擬変数」の考えを組み合わせた方法を提案している。山脇・山本・溝口（2013）は，問題場面から方程式を立式する手段が明確な位置付けを与えられているとはいえないことを指摘し，方程式を解くこととグラフをかくことを統合的に再編する新しいカリキュラムの実現可能性について検討している。

また，森田（2005）は，相当関係のシェマ化に着目し，算術的方法と代数的方法の隔たりを解消

することで，方程式の構造理解が促進できることを明らかにした。眞渕・秋田（2013）は，連立方程式の解き方を題材に，「複数の表現の提示」，「複数の表現の比較」，「共通性の把握」を設定した学習活動が，解法についての理解を深めることを明らかにしている。

３．授業設計と授業の実際

(1) 本研究で扱う文章題と授業設計

本研究では，どの生徒も個人で解決できることや生徒たちが様々な解法を生み出すことを期待し，小学校算数の知識を用いて解くことができる文章題として，次の鶴亀算の問題に着目する。

【問題】　鶴と亀が合わせて 10 匹いる。足の数は合わせて 26 本である。このとき，鶴と亀はそれぞれ何匹ずついるか。

この問題の解法には，①鶴亀算の考え方による解法，②１元１次方程式による解法，③全ての組み合わせを表にまとめ調べる解法，④表の一部から規則を読み取り調べる解法，⑤面積図による解法，⑥連立２元１次方程式による解法，⑦１次関数の考えを用いる解法，⑧行列に左から逆行列をかける解法がある。ただし，この④については，作成した表を鶴や亀に関する事象と捉えず，表にある数の変化の規則性のみに着目することで答えを得ることもできる。

また，本研究では，文字式の効果である「形式的処理により思考や計算の量を軽減することができる」ことを実感できる教材である。方程式を解くことで，鶴亀算のように根拠をもとに計算を進める必要はなくなる。しかし，方程式を解く過程で見られる計算は，鶴亀算の解法過程で見られる根拠や意味をもっている。立てた方程式を解くのみでは，その意味が見えにくい。

以上のことを踏まえ，中学校第１学年「１次方程式の利用」において，方程式を解くことの意味を解釈する活動を，次のように設計した。

活動１）文章題を，１次方程式をはじめとした様々な方法で解決する。（個人追究）
活動２）１次方程式を解く過程とその他の解法を比較する。（協働追究・全体追究）
活動３）これまでの活動を振り返り，１次方程式とその他の解法を比較して理解した事柄や感想，これからさらに探究したい事柄をまとめる。（個人）

本研究では，活動２・３に焦点を当て，生徒たちの特徴的な活動の様相を考察する。

(2) 授業の実際

①第１時限

問題解決の見通しについて，個人で考えた後，全体で１次方程式，鶴亀算，表，図を利用する方針が共有された。生徒はそれをもとに，活動１に移る。生徒の記述には，様々な方法で問題解決をしたことを踏まえ，「図や表より方程式を使った方が速く解ける。」と記されている。

②第２時限

活動２の協働追究では，教師から個人追究で得られた様々な解決方法を共有することに加え，それら複数の方法を比較し，方法どうしの関連について考察する課題が示された。

【課題】　問題を解決した方法には，どのようなつながりがあるだろうか。

生徒たちは，自分では解決できなかった方法について，聞き合ったり説明し合ったりすることで，様々な解法を見いだしていた。その中には，鶴亀算の考え方について，表を用いて説明する姿も見

られた。しかし，生徒により板書された様々な解法において，解法どうしの関連は，見いだせずにいた。

そこで，教師はそれぞれの解法に出てきた式に着目することを促し，議論する内容を焦点化した。すると，生徒は鶴亀算と表を用いた解法に同じ数や式があることに気付き，それらの関連を見いだすと（図１），さらに，方程式による解決過程と面積図を比較し，それらの関連を見いだしていった（図２）。

このように，それぞれの解法に見られる共通の式に気付く生徒が次第に増え始め，方程式の計算過程の意味について考え始める生徒も見られた。その後の全体追究では，それぞれの解法についての説明とそれらに共通の式が出てくることが共有された。方程式を解く過程においても同様であったことで，生徒たちは，これまで形式的に解いていた計算過程に改めて着目していた。授業終盤では，これまでの学習過程を振り返り，分かったことや新たな疑問，感想をまとめる課題を提示し，授業を終えた。

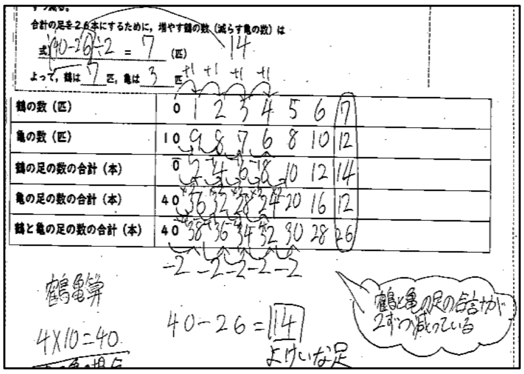

図１．鶴亀算と表に関連を見いだす記述

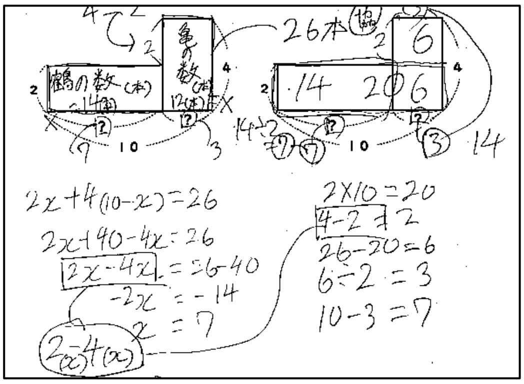

図２．面積図と方程式に関連を見いだす記述

４．授業の考察

(1) 方程式を解く過程と既習知識で解く過程を比較することについて

生徒にとって，活動２における協働追究の前半までは，この問題に複数の解法が存在するという認識であった。また，この活動は，方程式を立式することができれば，形式的に解くことで答えに辿り着くという方程式のよさを実感させた。実際，「図や表より方程式を使った方が速く解ける。」という内容に類似した記述は，複数の生徒に見られた。この段階は，様々な解法の具体的な方法や処理のしやすさといった視点での比較であり，構造に着目した関連付けをすることはできていない。

協働追究の後半では，生徒が自分の考えを他者に伝える活動を通して，鶴亀算と表との類似した構造に気付き，関連を見いだした（図１）。これが，面積図と方程式の構造に着目し，それらの関連を見いだす契機となり（図２），他の解法どうしの関連について考察する興味関心を高めていた。

解法どうしの解決過程に見られる式について焦点化して比較する活動は，方程式がもつよさに加え，方程式の計算過程に着目する視点を生む（図２）。それは，鶴亀算の考えを背景に，方程式を解く過程の意味を解釈する活動に繋がる。学習後の生徒の感想には，「小学校の習い方は理屈を表しているから，これが土台となって方程式はできている。」といった既習知識と方程式の関連について，意外性や驚きが記述されている。また，方程式のよさを実感しながらも，「方程式では規則性が見えない。」との指摘がある。解法の手がかりであった既習知識に見られる考えや変化の規則性が，方程式の計算過程では見えにくいことに着目し，既習知識のよさや新たな価値を見いだした。

(2) 既習知識への新たな意味や価値に気付くことについて

学習後の感想には，「今やっているものも来年同じようなやり方で使うかもと思ったので，手を抜

かないでしっかり難しいものも思い出したい。」,「他に，１次方程式を利用した解き方と小学校で学習した解き方が関わっているものはないのかな。」といった記述があった。新しい知識の獲得後に既習知識を見直す活動は，今の学習がこれからの学習に関わっていることへの予想や，今後の学習への洞察をもたせることができる。それは，今やこれからの学習を大切にしたいという生徒の学習に対する取り組みそのものへの変容に繋がる。

５．結語

本研究の目的は，新しい知識の獲得で活用した既習知識を見直す活動の効果を特定することである。そのために，中学校第１学年「１次方程式の利用」で，既習知識を活用して新しい知識を獲得した後，新しい知識から俯瞰して既習知識を見直すことを意図した授業を設計し，実践した。そして，その学習過程に見られる生徒の特徴的な活動や記述物を質的に分析し，その効果を特定した。その結果として，次の２点を明らかにした。

(1)　方程式を解く過程と既習知識で解く過程を比較することにより，方程式を解く過程に見られる計算式に意味を見いだし，既習の解法に対する新たな価値や意味をもたせることができる。

(2)　既習知識に対して新たな意味や価値に気付くことは，現在の学習を大切にする姿勢が身に付いたり，今後の学習への取り組みが変容したりする契機となり得る。

今後の課題は，他の領域や単元において，新しい知識の獲得で活用した既習知識を見直す活動を意図した授業を設計，実践し，その学習過程で見られる生徒の特徴的な動きや生徒の記述物を質的に分析することにより，その効果を特定することである。

引用文献

D. P. オースベル・F. G. ロビンソン(1984). 吉田章宏・松田彌生(訳). 『教室学習の心理学』. 黎明書房.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In Tall, D. (Eds.), *Advance Mathematical Thinking* (pp.95-123). Mathematics Education Library. Vol.11. Kluwer Academic Publishers.

眞渕綾希・秋田美代(2013). 「数学の活用力を高める指導についての研究－関係の表象を中心として－」. 『数学教育学会誌』, Vol.54, No.3・4, pp.117-126.

文部科学省(2017). 『中学校学習指導要領解説(平成 29 年告示)数学編』. 日本文教出版.

森田聡(2005). 「１次方程式における算術的方法から代数的方法への移行に関する考察～相当関係のシェマ化に着目して～」. 日本数学教育学会『第 38 回数学教育論文発表会論文集』, pp.325-330.

両角達男・荻原文弘(2013). 「有理数列に関する性質を発見し証明する学習過程とその様相－スパイラルを重視した数学的活動を基にして－」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究臨時増刊』, 第 95 巻, pp.369-376.

荻原文弘・両角達男(2016). 「円と球の求積公式を導出し解釈する学習過程に関する研究－スパイラルを重視した数学的活動をもとにして－」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 22 巻, 第２号, pp.11-24.

鈴木康志(2005). 「１次方程式を利用する文章題の立式を援助する方法の考察－「try and error」と「擬変数」の観点から－」. 日本数学教育学会『第 38 回数学教育論文発表会論文集』, pp.247-252.

手島勝朗(1992). 『知的葛藤を生みだす算数の授業』. 明治図書.

山脇雅也・山本靖・溝口達也(2013). 「中学校数学科における関数と方程式の統合カリキュラムの開発研究－第２学年及び第３学年の授業研究を基に－」. 全国数学教育学会『数学教育学研究』, 第 19 巻, 第２号, pp.185-201.